

7. témakör: kombinatorika

Kidolgozott feladatok:

1.) A színházba egy 5 fős baráti társaság jegyei egymás mellé szólnak. Hányféleképpen ülhetnek le egymás mellé? Hányféleképpen ülhetnek le akkor, ha András és Bori mindenképp egymás mellett szeretne ülni?

Megoldás:

Az első székre 5 ember bármelyike leülhet. De bármelyikük is ült le, a maradék 4 ember bármelyike leülhet a 2. székre, a 3. székre 3 ember, a 4. székre 2 ember, az ötödik széken pedig már csak az utolsó ember foglalhat helyet. Ezzel $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5!$ (ejtsd: 5 faktoriális) = 120 lehetőséget kaptunk.

Ha két ember mindenképp egymás mellett szeretne ülni, akkor tekintsük őket 1 embernek. Így csak 4 embert kell sorbarendezni az összes lehetséges módon, ez az előző gondolatmenettel $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ sorrend. Csakhogy a 2 egymás mellett ülő ember fordított sorrendben is ülhet, így $2 \cdot 24 = 48$ a végeredmény.

2.) Az 1, 2, 3, 4, 5 számjegyekből hány háromjegyű szám készíthető, ha a számjegyek nem ismétlődhetnek. És akkor, ha ismétlődhetnek?

Megoldás: Az első számjegy 5, a második 4, a harmadik 3-féleképpen alakulhat, azaz $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ a megoldás.

Ha ismétlődhetnek a számjegyek, akkor $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$ darab ilyen háromjegyű szám létezik.

3.) 10 ember között 4 egyforma nyereményt sorsolnak ki. Hányféleképpen végződhet a sorsolás, ha mindenki csak egyszer nyerhet? És akkor hány végeredmény lehet, ha négy különböző nyereményt sorsolnak ki és mindenki egyszer nyerhet? És ha mindenki többször is nyerhet?

Megoldás:

4 egyforma nyereménynél nincs 1., 2., 3., 4. nyeremény, mivel mindegyik egyenrangú. Ilyenkor

nem számít a 10 ember közül a 4 ember kiválasztási sorrendje. Ekkor a megoldás: $\binom{10}{4}$ (ejtsd: 10

alatt a 4). Kiszámítási módja:
$$\frac{10!}{4!(10-4)!} = \frac{10!}{4!6!} = 210$$

Négy különböző nyeremény esetén van 1., 2., 3. és 4. nyeremény, azaz a megoldás:

$10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5040$ -féle lehet a sorsolás végeredménye. Ha mindenki többet is nyerhet, akkor $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10000$ -féle.

Gyakorló feladatok:

- 1.) Egy lifthez 5 ember érkezik, de egyszerre csak 3 ember fér be. Hányféleképpen választhatjuk ki az első menet utasait?
- 2.) 20 ember közül 3 fős bizottságot választanak, ahol van elnök, alelnök és titkár. Hányféleképpen tehető ez meg?
- 3.) Az 4, 5, 6, 7, 8, 9 számjegyekből hány négyjegyű páros szám készíthető?
- 4.) Az A,A,A,B,B betűkből hány 5 betűs (nem feltétlenül értelmes) szó készíthető?
- 5.) Egy dobókockával 3-szor dobunk egymás után. Hány dobássorozat lehetséges?
- 6.) Egy könyvtárban 7 könyvet szemelünk ki, de csak 3-at lehet kölcsönözni közülük. Hányféleképpen választható ki a három könyv?
- 7.) 15 emberből 5 tagú bizottságot választunk, ahol mindenkinek ugyanaz a rangja. Hányféleképpen tehetjük ezt meg?
- 8.) Egy könyvespolcon 7 különböző matekkönyv van. Hányféleképpen tehetjük őket egymás mellé, ha az Egységes Érettségi Feladatgyűjtemény két kötetét mindenképpen egymás mellé szeretnénk helyezni?
- 9.) Egy úszóversenyen 8-an indulnak. Hányféleképpen alakulhat az első 3 dobogós sorrendje?
- 10.) 6 ember - 3 férfi és 3 nő - egymás mellett foglal helyet. Hányféleképpen ülhetnek le, ha a férfiak és a nők felváltva szeretnének ülni?

Megoldások:

- 1.) 5 alatt a 3 = 10.
- 2.) $20 \cdot 19 \cdot 18 = 6840$.
- 3.) $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3 = 180$.
- 4.) $5! / (3! \cdot 2!) = 10$ vagy felírjuk az összes lehetőséget: AAABB; AABAB; AABBA; ABAAB; ABABA; ABBAA; BAAAB; BAABA; BABAA; BBAAA;
- 5.) $6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$.
- 6.) 7 alatt a 3 = 35.
- 7.) 15 alatt az 5 = 3003.

8.) $2 \cdot 6! = 1440$.

9.) $8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$.

10.) $3! \cdot 3! \cdot 2 = 72$.

Kombinatorika feladatok

- 1./ A 0, 1, 2, 3, 4, 5 számjegyek felhasználásával hány olyan hatjegyű számot írhatunk fel, amelyben minden számjegy csak egyszer fordul elő?
- 2./ Tíz regény közül az egyik háromkötetes, a többi egykötetes. Hányféleképpen tehetjük fel a könyveket a könyvespolcra, ha a háromkötetes regény könyveinek egymás mellett kell lenniük?
- 3./ 10 házaspárt szeretnénk leültetni egy egyenes asztal mellé. Hányféle sorrend lehetséges, ha a házaspárok egymás mellett ülnek?
- 4./ A 0, 1, 2, 3, 4 számjegyekből hány ötjegyű szám készíthető, ha minden számjegyet csak egyszer használunk fel? Ezek között hány olyan szám van, amelyben a 0 a második helyen szerepel?
- 5./ 10 házaspárt szeretnénk leültetni egy egyenes asztal mellé. Hányféle sorrend lehetséges, ha azonos neműek nem ülhetnek egymás mellett?
- 6./ Hány olyan permutációja van az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 elemeknek, amelyben az első három helyet a 6, 7, 8 elemek foglalják el valamilyen sorrendben, s az utolsó helyen az 5-ös áll?
- 7./ Egy dobozban 20 db különböző gépalkatrész van. Ezek között 5 selejtes. Hányféleképpen vehetjük ki egyenként mind a 20 darab alkatrészt úgy, hogy a selejtéseket utoljára vesszük ki?
- 8./ A *MATEMATIKA* szónak hány permutációja van?
- 9./ Hány hatjegyű páros szám alkotható a 2, 2, 3, 5, 6, 6 számjegyekből?
- 10./ Hányféleképpen tölthetünk ki egy TOTÓ szelvényt - ha 13 mérkőzésre tippelünk - úgy, hogy 8 darab 1-es, 2 darab x-es és 3 darab 2-es tipp legyen rajta?
- 11./ A *KOMBINATORIKA* szónak hány permutációja van?
- 12./ Hány nyolcjegyű szám készíthető a 0, 0, 0, 3, 3, 3, 4, 4 számjegyekből?
- 13./ Hányféle sorrendben húzhatunk ki egy dobozból 5 fehér és 4 fekete golyót, ha csak azokat a húzásokat tekintjük különbözőeknek, amelyekben a színek más sorrendben következnek?
- 14./ Hány olyan ötjegyű szám van amelynek számjegyei különbözőek?

- 15./ Hány olyan négyjegyű különböző számjegyekből álló szám van, amelyben két páros és két páratlan számjegy szerepel?
- 16./ Hány olyan hatjegyű különböző számjegyekből álló szám van, amelyben négy páratlan számjegy szerepel?
- 17./ Hány háromjegyű szám képezhető a 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 számjegyekből, ha minden szám csak különböző számjegyet tartalmazhat?
- 18./ Egy 34 fős szervezet 5-tagú vezetőséget választ: 1 titkárt és 4 vezetőségi tagot. Hányféle kimenetele lehet a választásnak? (A titkárt a vezetőségi tagoktól megkülönböztetjük, de a 4 vezetőségi tag között nem teszünk különbséget.)
- 19./ Egy páncélszekrény 6 egymás mögötti tárcsa megfelelő beállításakor nyitható ki. A tárcsák 9 számjegyet tartalmaznak, amelyekből egyet kell beállítanunk. Ha valaki nem ismeri a megfelelő számkombinációt, mennyi időt vesz igénybe, amíg biztosan ki tudja nyitni a szekrényt, ha egy beállítás 5 másodpercig tart?
- 20./ Az 1, 2, 3, 4 számjegyek felhasználásával, ismétlődést is megengedve, hány kétjegyű, hány háromjegyű, hány hatjegyű számot állíthatunk elő?
- 21./ Hány ötjegyű szám írható fel a 0, 1, 2 számjegyek felhasználásával?
- 22./ Csupa páros számjegyből hány négyjegyű szám állítható elő?
- 23./ Katonaságnál az őrszolgálati egységből egyszerre 4 ember áll őrségben. Hány tagból áll az őrszolgálati egység, ha az őrségre 1365-féleképpen lehet 4 őrt kiválasztani? (az érdektelen, hogy a 4 főből ki melyik sarkán áll a laktanyának)
- 24./ A 32 lapos magyar kártyából kiválasztunk 10 lapot. Hányféleképpen fordulhat elő ilyen kiosztásban, hogy a 4 ász a 10 lap között legyen?
- 25./ A vakok részére készített írás a következőképpen készül. Kartonpapírra előnyomott téglalaphálózat egyes téglalapjaiba lyukakat szúrunk. A lyukak száma 1-től 6-ig terjedhet, mégpedig úgy, hogy minden téglalapban, egymás alatti 3-szor 2 hely megfelelő pontjainak kiszúrásával. Az így kapott jeleket a vakok ujjakkal kitapintva „olvassák”. Hányféle jel készülhet így?
- 26./ Írjuk fel az 1, 2, 3, 4, 5, 6 elemek összes negyedosztályú ismétlés nélküli kombinációját!
- 27./ Egy pályázatra 10 pályamunka érkezett, és 6 egyenlő díj van. Hányféleképpen lehet a díjakat kiadni, ha a díjak felezése, vagy megosztása tilos?
- 28./ 100 csavar közül, amelyek között 10 darab selejtes, kiválasztunk 5-öt.
a./ Hányféleképpen lehetséges ez?
b./ Hány olyan eset van, amelyben a kiválasztottak mind hibátlan csavarok?
c./ Hány olyan választás létezik, amelyben 3 csavar jó és 2 selejtes?
- 29./ Egy gyerek 5 különböző fagyalaltból választhat egy háromgombócós adagot. Hányféle lehetősége van a választásra? A tölcserben a gombócok sorrendjére nem vagyunk tekintettel.

- 30./ Hányféleképpen helyezkedhet el a sakktáblán a világos és a sötét király? (A királyok által elfoglalt mezők sem élben, sem csúcsban nem érintkezhetnek egymással.)
- 31./ Egy nyolctagú család egy alkalommal 4 színházjegyet kap. Hányféleképpen oszthatók ki a jegyek a családtagok között?
- 32./ Egy dobozban 16 golyó van, közülük 10 fehér, 4 piros és két kék színű. A 16 golyót egymás után kihúzzuk a dobozból. Hányféle húzási sorrend adódik, ha az azonos színűeket nem különböztetjük meg egymástól?
- 33./ A BKV járatain az utasok által működtetett jegykezelő automata a jegyen lévő 9 számozott mezőből néhányat a jegykezelés alkalmával kilyukaszt. Hány különböző számkombináció állítható be a gépen, ha a kilyukasztott mezők száma 1 és 4 közé esik, a határokat is beleértve?
- 34./ Egy dobozból, amelyben 8 piros és bizonyos számú fehér, számozott golyó van, egymás után, visszatevés nélkül 1280-féleképpen húzható ki három golyó úgy, hogy két piros vagy két fehér golyó ne következzen egymás után. Hány fehér golyó van a dobozban?

Kombinatorika feladatok megoldása

1./ $6! - 5! = 720.$ 2./ $10! \cdot 3! = 21772800.$ 3./ $10! \cdot 2^{10} = 3715891200.$

4./ $5! - 4! = 120.$
 $\frac{0}{\quad} : 4 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24.$

5./ $2 \cdot 10! \cdot 10!$ 6./ $3! \cdot 4!$ 7./ $15! \cdot 5!$

8./ $P_{10}^{2,3,2,i} = \frac{10!}{2! \cdot 3! \cdot 2!} = 151200.$ 9./ $\left. \begin{array}{l} \frac{5!}{2!} = 60 \\ \frac{5!}{2!} = 60 \end{array} \right\} = 120.$

10./ $P_{13}^{8,2,3,i} = \frac{13!}{8! \cdot 2! \cdot 3!} = 12870.$ 11./ $P_{13}^{2,2,2,2,i} = \frac{13!}{2! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 2!}$

12./ $P_8^{3,3,2,i} - P_7^{2,3,2,i} = \frac{8!}{3! \cdot 3! \cdot 2!} - \frac{7!}{2! \cdot 3! \cdot 2!} = 350.$

13./ $\frac{9!}{5! \cdot 4!} = 126.$ 14./ $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 27216.$

15./ $720 + 1440 = 2160.$ 16./ $\binom{5}{4} \binom{4}{1} \cdot 4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 + \binom{5}{2} \binom{4}{2} \cdot 5! = 5520.$

17./ $6 \cdot 6 \cdot 5 = 180.$

18./ $\frac{9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{8} = 17010.$

19./ $9^6 = 2657205 \text{ sec} = 738,1125 \text{ óra}.$

20./ kétjegyű: $4^2 = 16,$ háromjegyű: $4^3 = 64,$ hatjegyű: $4^6 = 4096.$

21./ $2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 162.$

22./ $\binom{4}{3} \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 + 4! = 96.$

23./ Az őrszolgálati egység létszáma n fő. $\binom{n}{4} = 1365.$ $n = 15.$

24./ $\binom{4}{4} \binom{28}{6} = 376740.$ 25./ 63.

	1 2 3 4	1 2 5 6	2 3 4 5
	1 2 3 5	1 3 4 5	2 3 4 6
26./	1 2 3 6	1 3 4 6	2 3 5 6
	1 2 4 5	1 3 5 6	2 4 5 6
	1 2 4 6	1 4 5 6	3 4 5 6

27./ $\binom{10}{6} = 210.$ 28./ a./ $\binom{100}{5}$ b./ $\binom{90}{5}$ c./ $\binom{90}{3} \binom{10}{2}$

29./ $C_5^{3,i} = \binom{5+3-1}{3} = 35.$ 30./ $C_6^{3,i} = \binom{6+3-1}{3} = 56.$

31./ $\binom{8}{4}$ 32./ $P_{16}^{10,4,2} = \frac{16!}{10! \cdot 4! \cdot 2!}$

33./ $\binom{9}{1} + \binom{9}{2} + \binom{9}{3} + \binom{9}{4} = 255$ 34./ 10 fehér golyó

Kombinatorika - kidolgozott típuspéldák

Elmélet:

	minden dolog különböző	lehetnek köztük egyformák
az összes dolgot sorba rakjuk	<p>ismétlés nélküli permutáció</p> <p>Hányféleképpen lehet sorba rakni n különböző dolgot? $P=1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n=n!$</p> <p><i>például:</i> hányféle sorrendben ülhet le egymás mellé 5 ember? $5!=1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5=120$</p>	<p>ismétléses permutáció</p> <p>Hányféleképpen lehet sorba rakni n dolgot, ha köztük n_1, n_2, \dots, n_k darab egyforma van? $(n_1+n_2+\dots+n_k=n)$</p> $P = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_k!}$ <p><i>például:</i> hányféleképpen lehet sorba rakni 2 kék és 3 piros golyót? $\frac{5!}{2! \cdot 3!} = \frac{120}{2 \cdot 6} = 10$</p>
választunk néhányat a dolgok közül (nem számít a sorrend)	<p>ismétlés nélküli kombináció</p> <p>Hányféleképpen lehet n különböző dologból kiválasztani k darabot, ha nem számít a kiválasztás sorrendje és mindegyiket csak egyszer választhatjuk?</p> $C = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$ <p><i>például:</i> lottó (90 számból választunk ötöt, nem számít a kiválasztás sorrendje) $\binom{90}{5} = \frac{90!}{5! \cdot 85!} = 43949268$</p>	<p>ismétléses kombináció (NEM érettségi anyag!)</p> <p>Hányféleképpen lehet n különböző dologból kiválasztani k darabot, ha nem számít a kiválasztás sorrendje és egy dolgot többször is választhatunk?</p> <p><i>például:</i> a lottóhúzásnál minden alkalommal visszateszem a kihúzott golyót, így egy szám többször is szerepelhet</p>
választunk néhányat a dolgok közül és sorba rakjuk őket	<p>ismétlés nélküli variáció</p> <p>Hányféleképpen lehet n különböző dologból kiválasztani k darabot, ha számít a kiválasztás sorrendje és mindegyiket csak egyszer választhatjuk?</p> $V = \frac{n!}{(n-k)!}$	<p>ismétléses variáció</p> <p>Hányféleképpen lehet n különböző dologból kiválasztani k darabot, ha számít a kiválasztás sorrendje és egy dolgot többször is választhatunk? $V=n^k$</p> <p><i>például:</i> totó (a 3 lehetséges</p>

	<p><i>például:</i> egy 10 csapatos bajnokságban hányféle sorrend alakulhat ki a dobogón?</p> $\frac{10!}{(10-3)!} = \frac{10!}{7!} = 8 \cdot 9 \cdot 10 = 720$	<p>végeredményből (1, 2, x) képezünk 14 (13+1) hosszúságú sorozatokat)</p> $3^{14} = 4782969$
--	--	---

A feladatok jelentős része vegyes típusú, ahol nem a fenti képleteket, hanem a képletek megalkotásához alkalmazott gondolatmenetet kell használni; vagy egyértelműen valamelyik fenti típusba tartozik, de "józan paraszti ésszel", képlet használata nélkül egyszerűbben megoldható. (Kivételt jelentenek a kombináció-típusú feladatok (azaz, ahol a sorrend nem számít), itt

"agyalás" helyett az $\binom{n}{k}$ képletbe helyettesítünk.)

Például:

- hány 5 jegű szám készíthető az 1, 2, 3, 4, 5 számjegyek egyszeri felhasználásával?

(ismétlés nélküli permutáció)

az első helyre bármelyik számot választhatom az 5 közül, a második helyre a maradék 4-ből, a harmadikra a maradék 3-ból választhatok stb., így összesen $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ szám készíthető

- hány 3 jegű szám készíthető az 1, 2, 3, 4, 5 számjegyek egyszeri felhasználásával?

(ismétlés nélküli variáció)

az első helyre bármelyik számot választhatom az 5 közül, a második helyre a maradék 4-ből, a harmadikra a maradék 3-ból választhatok, azaz összesen $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ szám készíthető

- hány 3 jegű szám készíthető az 1, 2, 3, 4, 5 számjegyekből, ha mindegyiket többször is felhasználhatom?

(ismétléses variáció)

mindhárom helyre bármelyik számjegy kerülhet, így összesen $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$ szám készíthető

- hány 4 jegű szám készíthető a 0, 1, 2, 3, 4 számjegyek egyszeri felhasználásával?

(vegyes feladat)

az első helyre 4 számjegyből választhatok (0 nem állhat az első helyen), a második helyre a maradék 4-ből bármelyik kerülhet (itt már lehet 0), a harmadikra a maradék 3-ból bármelyik stb., azaz összesen $4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 96$ szám készíthető

- hány 4 jegyű szám készíthető a 0, 1, 2, 3, 4 számjegyekből, ha mindegyiket többször is felhasználhatom?

(vegyes feladat)

az első helyre 4 számjegyből választhatok (0 nem állhat az első helyen), a második helyre bármelyik kerülhet (itt már lehet 0), a harmadikra szintén bármelyik stb., azaz összesen $4 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 500$ szám készíthető

Típusfeladatok:

Egy 10 tagú társaságban mindenki mindenkivel kezet fog. Hány kézfogás történik?

(ismétlés nélküli kombináció)

1. megoldás: az első ember 9 másikkal fog kezet, a második 8 emberrel (az elsővel való kézfogását az első embernél már beszámítottuk), a harmadik 7 emberrel stb., azaz összesen $9+8+7+6+5+4+3+2+1=45$ kézfogás történik.

2. megoldás: minden ember 9 másikkal fog kezet, ez összesen $9 \cdot 10 = 90$. Így azonban minden kézfogást duplán számolunk (mindkét "kézfogónál" beleszámítjuk), tehát kettővel el kell osztani, azaz összesen $90/2 = 45$ kézfogás történik.

3. megoldás: annyi kézfogás történik, ahányféleképpen kiválaszthatunk 2 embert a 10-ből. Azaz $\binom{10}{2} = \frac{10!}{2! \cdot 8!} = 45$

Egy 12 csapatos labdarúgó tornán hányféle sorrend alakulhat ki a dobogón?

(ismétlés nélküli variáció)

Az első helyre a 12 csapatból bármelyik kerülhet, a második helyre a maradék 11-ből, a harmadikra a maradék 10-ből választhatunk, azaz összesen $12 \cdot 11 \cdot 10 = 1320$ -féle sorrend lehetséges.

Egy 5 házból álló házsort szeretnénk kifesteni. Hányféle kifestés létezik, ha 4-féle festékünk van? (Egy házhoz csak egyféle festéket használunk, a festékeket nem lehet keverni.)

(ismétléses variáció)

Mind az 5 házhoz használhatjuk bármelyiket a 4-féle festék közül, azaz összesen $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 1024$ lehetőség van.

Egy 5 házból álló házsort szeretnénk kifesteni. Hányféle kifestés létezik, ha 7-féle festékünk van, és minden háznak különböző színűnek kell lenni?

(Egy házhoz csak egyféle festéket használunk, a festékeket nem lehet keverni.)

(ismétlés nélküli variáció)

Az első házhoz 7-féle festékből választhatunk, a másodikhoz a maradék 6-ból, a harmadikhoz a maradék 5-ből stb., azaz összesen $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 2520$ lehetőség van.

Egy 5 házból álló házsort szeretnénk kifesteni. Hányféle kifestés létezik, ha 4-féle festékünk van, és a szomszédos házak nem lehetnek egyforma színűek?

(Egy házhoz csak egyféle festéket használunk, a festékeket nem lehet keverni.)

(vegyes feladat)

Az első házhoz 4-féle festékből választhatunk, a másodikhoz a maradék 3-ból, a harmadikhoz szintén 3-ból (a második ház színét nem választhatjuk, de az elsőét igen), az összes továbbihoz is 3 színből, azaz összesen $4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 324$ lehetőség van.

Hányféleképpen lehet sorba rakni egy fehér, egy zöld, egy kék, egy piros és egy sárga golyót?

(ismétlés nélküli permutáció)

Az első helyre 5 színből választhatunk, a másodikra a maradék 4-ből, a harmadikra a maradék 3-ból stb., azaz összesen $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ lehetőség van.

Hányféleképpen lehet sorba rakni egy fehér, két zöld és három kék golyót?

(ismétléses permutáció)

Ha mind a 6 golyó különböző színű lenne, akkor $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$ lehetőségünk volna. A két zöld golyót $2 \cdot 1 = 2$, a három kéket pedig $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ -féleképpen lehet sorba rakni. Mivel az azonos színűeket egyformának tekintjük, az egymás közötti sorrendjeiket nem különböztetjük meg, tehát a 720 lehetőséget 2-vel, ill. 6-tal el kell osztani, azaz összesen $720 / (2 \cdot 6) = 60$ lehetőség van.

Egy 10 fős társaságban 4 könyvet osztunk szét. Hányféleképpen tehetjük meg, ha minden könyv különböző, és mindenki csak egy könyvet kaphat?

(ismétlés nélküli variáció)

Az első könyvet a 10 ember közül bárkinek adhatjuk, a második könyvet a maradék 9, a harmadikat a maradék 8 közül bármelyiknek stb., azaz összesen $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5040$ lehetőség van.

Egy 10 fős társaságban 4 könyvet osztunk szét. Hányféleképpen tehetjük meg, ha a könyvek egyformák, és mindenki csak egy könyvet kaphat?

(ismétlés nélküli kombináció)

A kérdés az, hogy hányféleképpen választhatjuk ki a 10 ember közül azt a négyet, aki könyvet kap (mivel a könyvek egyformák, a kiválasztás sorrendje nem számít). Összesen "10 alatt a 4" = $10!/(4! \cdot 6!) = 210$ lehetőség van.

Egy 10 fős társaságban 4 könyvet osztunk szét. Hányféleképpen tehetjük meg, ha minden könyv különböző, és mindenki több könyvet is kaphat?

(ismétléses variáció)

Mind a 4 könyvet kaphatja a 10 közül bármelyik ember, azaz összesen $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10000$ lehetőség van.

Egy 10 fős társaságban 4 könyvet osztunk szét. Hányféleképpen tehetjük meg, ha a könyvek egyformák, és mindenki több könyvet is kaphat?

(ismétléses kombináció)

1. megoldás: az ismétléses kombináció képlete nem érettségi anyag, de a következő gondolatmenet alapján megalkothatjuk az általános képletét. Szemléltessük a kiosztást a következőképpen: a 10 embert jelképezze 10 fehér golyó, a 4 könyvet pedig 4 fekete golyó. Rakjuk sorba a 10 fehér golyót, és mindegyik elé tegyünk annyi feketét, ahány könyvet kap a neki megfelelő ember. Pl. az első ember 1 könyvet kap, a negyedik kettőt, a tizedik pedig egyet:

●○○○●●○○○○○○●○

a lerakási szabályunk miatt a 10. fehér golyó után semmiképpen nem állhat fekete, így azt el is hagyhatjuk: ●○○○●●○○○○○○●

A könyveket tehát annyiféleképpen oszthatjuk ki, ahányféleképpen lehet 9 fehér és 4 fekete golyót sorba rendezni. Ezt $13!/(9! \cdot 4!) = 715$ -féleképpen tehetjük meg (ha az összes golyó különböző színű lenne, akkor $13 \cdot 12 \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 = 13!$ lehetőség volna. A 9 fehér golyót $9 \cdot 8 \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 = 9!$, a 4 feketét pedig $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 4!$ -féleképpen lehet sorba rendezni. Mivel az azonos színűeket egyformának tekintjük, az egymás közötti sorrendjeiket nem különböztetjük meg, tehát a $13!$ lehetőséget el kell osztani $9!$ -sal és $4!$ -sal).

2. megoldás: Vegyük sorra az összes lehetőséget: Ha mind a 4 könyvet ugyanaz az ember kapja, akkor 10-féleképpen oszthatjuk ki. Ha egy ember kap 3 könyvet, egy másik pedig 1-et, akkor 90-féleképpen oszthatjuk ki: a 3-könyvest 10, az 1-könyvest pedig a maradék 9 emberből választhatjuk ki, azaz összesen $10 \cdot 9 = 90$ lehetőség van.

Ha 2 ember kap 2-2 könyvet, akkor 45-féleképpen oszthatjuk ki: "10 alatt a 2" = $10!/(2! \cdot 8!) = 45$ -féleképpen választhatjuk a 10-ből azt a 2 embert, aki könyvet kap.

Ha 4 ember kap 1-1 könyvet, akkor 210 lehetőség van: "10 alatt a 4" = $10!/(4! \cdot 6!) = 210$ -féleképpen választhatjuk ki a 10-ből azt a 4 embert, aki könyvet kap.

Ha egy ember kap 2 könyvet, 2 pedig 1-1 könyvet, akkor 360 lehetőségünk van: a 2-könyvest 10 emberből választhatjuk ki, a két 1-könyvest pedig a maradék 9-ből ("9 alatt a 2" = $9!/(2! \cdot 7!) = 36$ -féleképpen, azaz összesen $10 \cdot 36 = 360$ -féleképpen választhatjuk ki a 3 emberünket. Összesen tehát $10 + 90 + 45 + 210 + 360 = 715$ lehetőség van.

Kombinatorika - feladatok és megoldásaik

1. Hány különböző rendszám adható ki, amely három betűből és azt követő három számból áll (az angol ábécé 25 betűt tartalmaz)?

Megoldás:

Az egyes betűhelyeken egymástól függetlenül 26-féle betű, míg a számhelyeken szintén egymástól és a betűktől is függetlenül 10-féle szám állhat. A megfelelő rendszámok száma ezért $26^3 \cdot 10^3$.

2.

1. Hányféleképpen állítható sorba n (különböző) gyerek?
2. Hányféleképpen ültethető kör alakú asztal köré n lovag?
3. Hányféleképpen fűzhető fel n különböző színű gyöngy egy láncra?
4. Válaszoljuk meg az előző kérdéseket akkor is, ha Jancsi és Juliska, Sir Lancelot és King Arthur, illetve a kék és a fehér gyöngy egymás mellé kell hogy kerüljenek.

Megoldás:

5. Az első helyre n , a másodikra $\binom{n-1}{i}$, általában az i -edik helyre $\binom{n+1-i}{i}$ -
 féleképpen választhatunk embert ($1 \leq i \leq n$), az összes lehetőség száma ezek
 szorzata, azaz $n!$ (ez valójában az ismétlés nélküli permutáció mintapéldája).
6. Először állítsuk sorba a lovagokat (az előző példa alapján ezt $n!$ -féleképpen
 tudjuk megtenni), majd ültessük le őket a kerekasztalhoz. Az ültetés után nem
 tudjuk megmondani, hol volt a sor vége, sőt: ha az ültetés alapján akarjuk
 sorbaállítani a lovagokat, akkor pontosan n -féleképpen jelölhetjük ki -- immár
 önkéntesen -- a sor kezdetét és végét. A lehetőségek száma ezért az előző feladat
 $(n-1)!$
 eredményének n -edrésze, azaz $(n-1)!$.
7. Míg a lovagok kerekasztalának kétirányú körüljárását megkülönböztettük, a lánc
 esetében azonosnak tekintünk két elrendezést, ha azok egymás tükörképei. Ezért a
 $(n-1)!/2$
 megoldások száma az előző esetnek a fele, azaz $(n-1)!/2$.
8. A közös alapötlet, hogy az egymás mellé teendő párokat egyként kezeljük. Az első
 $(n-1)$
 két esetben a párok egymás közötti sorrendje számít, a megoldás így az $(n-1)!$
 es eset kétszerese, azaz rendre $2(n-1)!$ illetve $2(n-2)!$. A harmadik esetben a
 tükrözést már eleve külön esetként kezeltük, így a párok egymás közötti sorrendje
 $(n-1)!$
 már nem számít. Ezért a harmadik esetre adandó válasz $(n-1)!$.
3. Hány olyan hatjegyű szám létezik, amelyben van két azonos számjegy? És hány ilyen 15-
 jegyű szám létezik?

Megoldás:

Az összes hatjegyű számok száma nyilván $10^6 - 10^5$, elegendő a „rossz”, azaz csupa
 különböző számjegyből álló számokat megszámlálni. Egy ilyen szám első számjegye 9-
 féle lehet (a 0 nem megengedett), a második számjegy szintén 9-féle (ez már lehet 0, de
 nem lehet azonos az első számjeggyel), a harmadik számjegy 8-féle, stb. A jó számok
 $10^6 - 10^5 - 9 * 9 * 8 * 7 * 6 * 5 = 763920$
 száma mindezek alapján $10^6 - 10^5 - 9 * 9 * 8 * 7 * 6 * 5 = 763920$.

A 15-jegyű számoknak a skatulyaelv alapján mindig van két azonos számjegye. Ezek
 $10^{15} - 10^{14}$
 száma $10^{15} - 10^{14}$.

4. Hányféleképpen olvasható ki az alábbi ábrából a "BSz Fan Club"?

B S Z F A N
 S Z F A N C
 Z F A N C L

F A N C L U

A N C L U B

5. **Megoldás:**

6. Az olvasás során ötször lépünk jobbra és négyszer lefelé. Az összesen kilenc lépésből tetszőlegesen kiválaszthatjuk a négy lépést, ehhez pontosan egy jó olvasás fog tartozni

$\binom{9}{4}$

és viszont. A lehetőségek száma ezért .

7. Hányféleképpen lehet eljutni az origóból a (2,3,5) pontba, úgy, hogy csak egységnyi hosszú jobbra, fel és előre lépések lehetségesek?

Megoldás:

Az előző feladatban látotthoz teljesen hasonló gondolatmenettel az eredmény $\binom{10}{2} \binom{8}{3} \binom{5}{5}$.

8. Legfeljebb hány pontban metszik egymást egy konvex 9-szög átlói?

Megoldás:

A 9-szög tetszőlegesen választott négy csúcsa konvex négyszöget alkot. A négyszög átlói a 9-szögnek is átlói. A 9-szög tetszőleges két átlójának metszéspontja előáll, mint egy alkalmasan választott ilyen konvex négyszög két átlójának metszéspontja. Az ilyen

négyszögek száma $\binom{9}{4}$, legfeljebb ennyi lehet tehát a 9-szög átló-metszéspontjainak a száma (ez el is érhető, ha semelyik három átló nem metszi egymást egy pontban).

9. Hányféleképpen tölthető ki egy lottószelvény? Hány 5, 4 és 3 találatos kitöltés van?

Megoldás:

Egy adott kitöltés során 5 számot választunk a 90-ből, a kitöltések száma ezért $\binom{90}{5}$.

Adott sorsolás mellett az öttalálatos kitöltések száma nyilván 1.

Négy találat eléréséhez először ki kell választanunk az eltalálni kívánt négy számot ($\binom{5}{4}$)

lehetőség), majd ötödiknek egy rossz számot kell választani a 85 rossz számból ($\binom{85}{1}$)

lehetőség). A négytalálatos kitöltések száma ezért $\binom{5}{4} \binom{85}{1}$.

Három találat eléréséhez először ki kell választanunk az eltalálni kívánt három számot $\binom{5}{3}$ (lehetőség), majd negyediknek és ötödiknek egy-egy rossz számot kell választani a 85 rossz számból $\binom{85}{2}$ (lehetőség). A háromtalálatos kitöltések száma ezért $\binom{5}{3} \binom{85}{2}$.

10. A polcon egymás mellett 12 könyv van. Hányféleképpen lehet kiválasztani 4-et úgy, hogy ne legyen közöttük két egymás melletti?

Megoldás:

Számozzuk meg a könyveket 1-től 12-ig, majd a polc mindkét szélére tegyünk egy-egy vázát.

A négy könyv levétele után nézzük meg, hogy az egyes könyvek között 0 vagy 1 könyvnyi hely van. A két szélen pedig a két vázát viszonyítsuk a könyvekhez. Ezeket a foghíjakat balról jobbra haladva egy 9 hosszú 0-1 sorozattal tudjuk leírni.

Vegyük észre, hogy ha a négy könyvet a feladat szövegének megfelelően vettük le a polcra, akkor a 9 hosszú 0-1 sorozat pontosan 4 darab 1-est fog tartalmazni (a levett négy könyv helyén tátongó űrt szimbolizálva).

Igaz továbbá, hogy tetszőleges 9 hosszú, 4 darab egyest tartalmazó 0-1 sorozathoz hozzárendelhető a maradék 8 darab könyv megfelelő elrendezése, így a könyvleszedéseket kölcsönösen egyértelműen megfeleltettük a 9 hosszú, 4 darab egyest tartalmazó 0-1 sorozatoknak.

Utóbbiak száma nyilván $\binom{9}{4}$, ez a feladat kérdésére adott válasszal is megegyezik.

11. Egy részeg postás figyelmetlenül oszt szét öt levelet azok címzettjeinek. Hányféleképpen teheti ezt meg úgy, hogy senki se a sajátját kapja meg? És úgy, hogy pontosan 1, 2, 3, 4 ill. 5 címzett kapja meg a saját levelét?

Megoldás:

Nyilvánvaló, hogy mind az öt levelet csak egyféleképpen lehet helyesen kézbesíteni, pontosan négy levelet pedig egyáltalán nem lehet helyesen kézbesíteni (hiszen ekkor az ötödik sem tévedhet el).

Ha pontosan három levél ér célba, akkor a postás tévedésből két levelet megcserélt. E két levél szabadon választható az ötből $\binom{5}{2} = 10$ (lehetőség), így ezen esetek száma 10.

Ha pontosan két levél ér célba, akkor a postás tévedésből három levelet ciklikusan elcserélt (másképp nem lehet pontosan hármat tévedni). E három levél szabadon

választható az ötből ($\binom{5}{2} = 10$ lehetőség), ezenkívül a ciklikus permutáció irányát is kétféleképpen választhatjuk meg. A lehetőségek száma ezért ebben az esetben 20.

Ha pontosan egy levél ér célba, akkor a postás kétféleképpen tévedhetett: vagy ciklikusan elcserélt 4 levelet, vagy pedig összecserélt két párt is. Négy adott levél $\frac{4!}{4} = 6$ -féle módon permutálható ciklikusan (lásd a kerekasztal lovagjainak ültetéseit). Két pár összecserélése pedig 3-féleképp történhet (egy ilyen konfigurációt egyértelműen meghatároz, hogy az 1-es számú levelet a másik három melyikével cseréltük össze). Ezért négy adott levélre a tévedési lehetőségek száma 9, a négy adott levelet pedig $\binom{5}{4} = 5$ -féle módon választhatjuk ki. A pontosan egy találat ezek szerint 45-féleképpen jöhet létre.

Ha pontosan 0 levél ér célba, akkor a postás ismét csak kétféleképpen tévedhetett: vagy ciklikusan cserélte el az öt levelet ($\frac{5!}{5} = 24$ lehetőség), vagy pedig egy párt összecserélt, a másik hármat pedig ciklikusan permutált. Utóbbi eset lehetőségeinek számához először válasszuk ki a párként elcserélt 2 levelet ($\binom{5}{2} = 10$ lehetőség), a maradék hármat pedig erre permutáljuk ciklikusan, vagy arra (2 eset). Az utóbbi eset ezért 20-féleképpen fordulhat elő, azaz összesen 44-féle módon lehetséges az, hogy a postás egyetlen levelet sem helyesen kézbesít.

Érdeemes elvégezni a következő egyszerű (ámbátor redundáns) ellenőrzést: a taglalt esetek uniója nem más, mint a levelek összes permutációinak halmaza, a lehetőségek számának összege tehát 120-at kell adjon eredményül (ez teljesül).

A feladat egy, a fentiekől gyökeresen különböző módon is megoldható. Igaz, hogy a másik megoldás sokkal bonyolultabb, de legalább általánosítható n darab levélre is. [Megnézem.](#)

12. Hány olyan 10 hosszú dobássorozat van (hagyományos dobókockával), melyben a dobott számok összege osztható 3-mal?

Megoldás:

Megadunk egy leképezést, amely tetszőleges 3-mal osztható összegű dobáshoz két másikat rendel: egy olyat, amely 3-mal osztva 1 maradékot ad és egy másikat, amely 2-t.

Legyen az a_1, a_2, \dots, a_{10} dobások összege 3-mal osztható. Legyen $b = a_1 + 1 \pmod{3}$ és $c = a_1 + 2 \pmod{3}$. Ekkor a b, a_2, \dots, a_{10} dobások összege 3-mal osztva 1, míg a c, a_2, \dots, a_{10} dobások összege 3-mal osztva 2 maradékot ad.

E leképezés kölcsönösen (háromoldalúan) egyértelmű, hiszen bármelyik maradékot adó dobássorozatból egyértelműen előállítható a másik kettő.

Az egyes maradékosztályokat eredményül adó dobássorozatok között tehát sikerült egy kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést találnunk, ezek száma ezért egyenlő. A számunkra megfelelő dobássorozatok száma ezért az összes lehetséges dobássorozat harmada, azaz $\frac{6^{10}}{3}$.

13. Egy n elemű halmaznak legfeljebb hány részhalmaza adható meg úgy, hogy bármelyik kettő metszete nemüres halmaz legyen?

Megoldás:

Egy n elemű halmaznak 2^n részhalmaza van. A részhalmazok párosíthatók úgy, hogy minden párban két diszjunkt halmaz legyen található (megfelelő, ha minden halmazhoz a saját komplementerét rendeljük párnak).

Megmutatjuk, hogy a feladat kérdésére adott válasz legfeljebb 2^{n-1} . Tegyük fel, hogy mégsem, azaz a részhalmazoknak több, mint a fele megadható megfelelően. Ekkor azonban a skatulyaelv alapján a megadottak között biztosan lenne kettő, amelyeket az előző bekezdésben egymás párjának választottunk - ám e két halmaz diszjunkt.

Másfelől megmutatjuk, hogy 2^{n-1} darab részhalmaz viszont kiválasztható megfelelő módon. Jelöljük ki az eredeti halmaz egy a elemét és tekintsük az összes olyan részhalmazt, amely tartalmazza a -t. Ezek száma nyilván 2^{n-1} és közülük bármely kettő metszete nemüres, hiszen tartalmazzák a -t.

A feladat kérdésére adandó válasz ezért 2^{n-1} .

Kombinatorika

1. Hány olyan háromjegyű szám van, amelynek minden számjegye páros?
2. Hány olyan háromjegyű szám van, amelynek számjegyei páratlan számok és 1-el kezdődik?
3. Hány olyan kétjegyű hárommal osztható szám van, amely minden jegye páratlan?
4. Hány olyan ötre végződő ötjegyű szám van, amely osztható 25-tel?
5. Hány olyan, 6-tal osztható ötjegyű szám van, amely csupa 4-esekből és 5-ösökből áll?
6. Van 1db 1-es, 2db 2-es, 2db 3-as, 1db 5-ös. Hány olyan hatjegyű számot lehet képezni ezekből a számkártyákból, hogy 3-mal osztható legyen?
7. Van 3db 1-es, 2db 2-es, 2db 3-as. Hány olyan hétjegyű számot lehet képezni ezekből a számkártyákból, amely 13-mal kezdődik?
8. Hány olyan négyjegyű szám van, amelynek a számjegyei csökkenő sorrendben követik egymást?
9. Egy dobozban 15 cédula van, 1-től 15-ig megszámozva. Kihúzzunk 5 cédulát. Hányféle esetben lesz a kihúzott legkisebb szám nagyobb, mint 5?
10. Hány olyan Lottó-szelvény van, amelyiknél pontosan négy találat van?

11. Egy 32 lapos magyar kártyából 6 lapot húzok ki egymás után, majd sorban felírom őket egy lapra. Hányféle eredmény jöhet ki, ha egy lapot kihúzás után
 - a.) visszateszek
 - b.) nem teszek vissza?
12. Van 10db korongom 3 piros, 1 kék, 1 zöld, 1 sárga, 1 lila, 1 fehér és 1 kék. Hányféleképpen rakhatom őket sorba?
13. Van 12db golyó, 3piros, 4 kék és 5 zöld. Hányféleképpen rakhatom őket sorba?
14. Van 3db piros és 2db kék golyó. Mennyi a valószínűsége, ha sorba rendezem, hogy nincs egymás mellett egyszínű golyó?
15. Van egy piros egy kék és egy zöld dobókockánk. Egyet kivesszünk, majd dobunk vele. Hányféle lehet a kísérlet kimenetele?
16. Egy szabályos kockával 5-ször dobunk egymás után. Hányféleképpen jöhet ki a kísérlet során az, hogy legalább egyszer 6-ost dobunk?
17. Hány egyenest határoz meg 12 pont, ha semelyik három nem esik egy egyenesbe?
18. Van 15db aranytallérom, 10 gyerek közt szeretném szétosztani. Hányféleképpen tehetem meg ezt, ha
 - a.) legalább egy tallért szeretnék mindenkinek adni
 - b.) nem muszáj mindenkinek adni?
19. Vegyük egy 100 elemű halmaz hatványhalmazát. Hány páros elemszámú halmaz van benne?
20. Van n db különböző elem. Ezeket sorba rendezem. Mekkora n értéke, hogyha 2-vel több tárgyam lenne, mint amennyi most van, akkor 156-szor több lehetőségem lenne a sorba rendezésre?
21. Egy pingpong-bajnokságon körmérkőzés szerint játszanak. Összesen 45-öt. Hányféle eredménye lehet a bajnokságnak, ha nem lehet holtversenyt elérni?
22. Van egy 32 fős osztály. Elhatározzák, hogy tombolát fognak szervezni. Már 4 tárgy össze is gyűlt. Csak a szabályokban nem tudnak megegyezni. Ki szeretnék számítani, hányféle kimenetele lehet a következő lehetőségeknek. Segíts nekik!
 - a.) A tárgyak ugyanolyanok, egy tanuló legfeljebb egyet nyerhet
 - b.) a tárgyak egyformák, egy tanuló többet is nyerhet.
Időközben a tárgyakat kicserélték négy különbözőre.
 - c.) A tárgyak különbözőek, egy tanuló legfeljebb csak egy tárgyat nyerhet
 - d.) a tárgyak különbözőek, egy tanuló több tárgyat is nyerhet.